PART2　三角関数を含む方程式・不等式

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{3}$

(4)　$5\cos\theta-2\sin^2\theta+4>0$

Point Pickup

・例えば(1)において，$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと，$\sin t=-\dfrac{1}{2}$ となる。

　これを満たす t の値を，t のとりうる値の範囲，すなわち $\theta-\dfrac{\pi}{3}$ の範囲において求める。

・複数の三角関数で表された式は，1 種類の三角関数で表すとよい。

第８講　PART2　確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

1 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}\pi,\ \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\pi$

2 $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)>\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{ク}} \leqq \theta < \boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コ}} < \theta < \boxed{\text{サ}},$

$\boxed{\text{シ}} < \theta < \boxed{\text{ス}}$

（ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{シ}}$）

① 0　② $\dfrac{5}{24}\pi$　③ $\dfrac{7}{24}\pi$　④ $\dfrac{\pi}{3}$

⑤ $\dfrac{23}{24}\pi$　⑥ $\dfrac{29}{24}\pi$　⑦ $\dfrac{31}{24}\pi$　⑧ $\dfrac{4}{3}\pi$

⑨ $\dfrac{47}{24}\pi$　⑩ 2π

3 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{セ}} \leqq \theta \leqq \boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}} < \theta \leqq \boxed{\text{チ}},$

$\boxed{\text{ツ}} < \theta < \boxed{\text{テ}}$

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑥ π　⑦ $\dfrac{4}{3}\pi$　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

⑨ $\dfrac{11}{6}\pi$　⑩ 2π

4　$2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$

$\theta=$ [ト], $\dfrac{\pi}{[ナ]}$, $\dfrac{[ニ]}{[ヌ]}\pi$

5　$2\cos^2\theta+\sin\theta-2>0$

[ネ] $<\theta<$ [ノ], [ハ] $<\theta<$ [ヒ]

（ただし，[ネ] $<$ [ハ]）

① 0　② $\dfrac{\pi}{6}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑥ π　⑦ $\dfrac{4}{3}\pi$　⑧ $\dfrac{3}{2}\pi$

⑨ $\dfrac{11}{6}\pi$　⑩ 2π

[MEMO]

PART2　三角関数を含む方程式・不等式

2　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

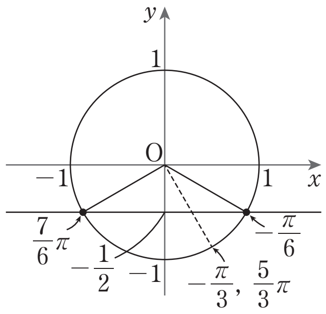
(1)　$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)>-\sqrt{3}$　　(4)　$5\cos\theta-2\sin^2\theta+4>0$

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

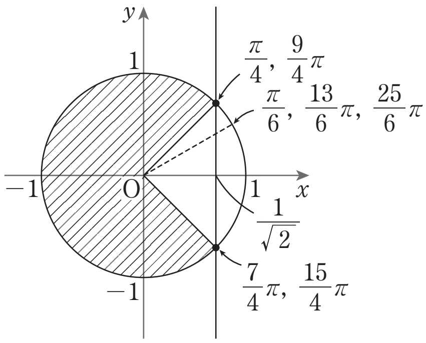
したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$



(2)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{15}{4}\pi$

したがって　$\dfrac{\pi}{24} \leqq \theta \leqq \dfrac{19}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{43}{24}\pi$



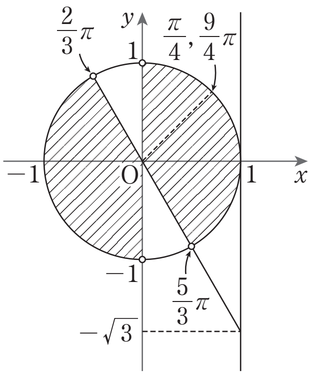
(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{2}\pi$，

$\dfrac{5}{3}\pi < \theta+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$

したがって

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{12}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi,\ \frac{17}{12}\pi < \theta < 2\pi$$



(4) $5\cos\theta-2\sin^2\theta+4>0$

$5\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)+4>0$

$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2>0$

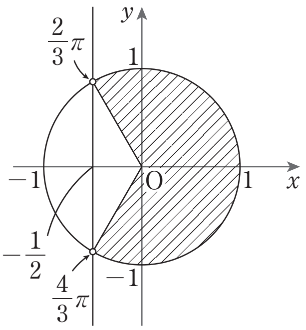
$(2\cos\theta+1)(\cos\theta+2)>0$

$\cos\theta\geqq-1$ より $\cos\theta+2>0$ であるから

$2\cos\theta+1>0$

すなわち $\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

したがって $0\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$



第 8 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：12，エオ：13，カキ：12

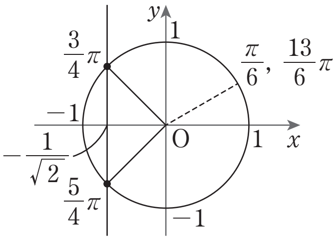
[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ [A]

$\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

ゆえに　$\theta = \boldsymbol{\dfrac{7}{12}\pi},\ \boldsymbol{\dfrac{13}{12}\pi}$



[A]
$\sin(a\theta + b) = p$ や $\cos(a\theta + b) < q$ などの形をした方程式，不等式は，まず（ ）の中の $a\theta + b$ のとりうる値の範囲を求める。
その範囲において，$\sin(a\theta + b) = p$ や $\cos(a\theta + b) < q$ を満たす $a\theta + b$ の値や範囲を求める。

2 [正解] ク：①，ケ：③，コ：⑤，サ：⑦，シ：⑨，ス：⑩

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{17}{4}\pi$ [A]

$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) > \dfrac{1}{2}$ であるから

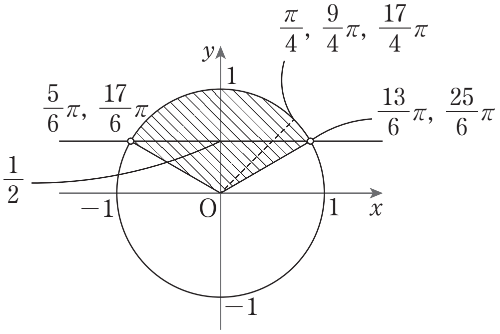
$$\frac{\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{17}{6}\pi,$$

$$\frac{25}{6}\pi < 2\theta + \frac{\pi}{4} < \frac{17}{4}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{7}{24}\pi,\ \frac{23}{24}\pi < \theta < \frac{31}{24}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{47}{24}\pi < \theta < 2\pi}$$



3　**[正解]** セ：①，ソ：④，タ：⑤，チ：⑧，ツ：⑨，
テ：⑩

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$ [A]

$\tan\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

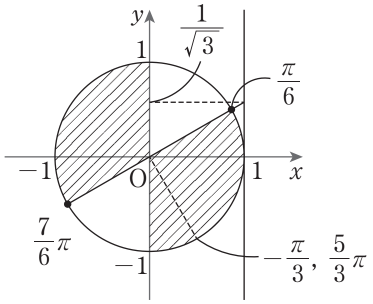
$$-\frac{\pi}{3} \leqq \theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi,$$

$$\frac{3}{2}\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

ゆえに

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\quad \frac{5}{6}\pi < \theta \leqq \frac{3}{2}\pi,}$$

$$\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi}$$



4 [正解] ト：0，ナ：3，ニ：5，ヌ：3

[解説]

$$2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$$

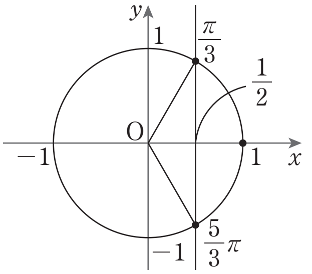
$$2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta-3=0$$ [B]

$$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$$

$$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)=0$$

よって　$\cos\theta=1,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$



[B]　複数の種類の三角関数で表された方程式や不等式は，１種類の三角関数で表すとよい。

5 [正解] ネ：①，ノ：②，ハ：⑤，ヒ：⑥

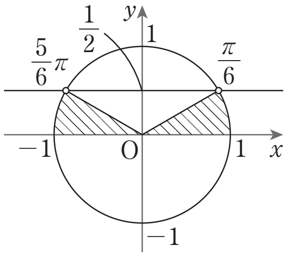
[解説]

$$2\cos^2\theta+\sin\theta-2>0$$

$$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2>0$$ [B]

$$2\sin^2\theta-\sin\theta<0$$

$$\sin\theta(2\sin\theta-1)<0$$

よって　$0<\sin\theta<\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{0<\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<\theta<\pi}$